الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2015

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب) بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.

جـ) استنتج أنّ النقطة D هي مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

د) عيّن إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D.

هـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ المحوري للقطعة $[AE]$.

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$.

3) أ) تحقق أن النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$.

ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين G و H.

حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثمّ احسب مساحته.

4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH).

أ) بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي (AEH).

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t;4-2t;5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t)=2|t|\sqrt{14}\ uv$.

(uv وحدة الحجوم).

د) عيّن إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللّتين يكون من أجليهما $v(t)=2\sqrt{3}\ uv$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=-2+i$ ، $z_C=-3$ ، $z_H=-3+4i$ و $z_I=-1-i$.

1) أ) مثّل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

ب) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C.

2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\dfrac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$.

ب) استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

جـ) بيّن أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4) بيّن أنّ النقط G ، H و I في استقامية.

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميّزة.

جـ) أنشئ المجموعة (Γ).

د) تحقّق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\right]$ على 7.

2) أ) بيّن أنّ 89 عدد أوّلي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ) بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوّليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x و y علماً أنّ: $\begin{cases}x^2-y^2=31328\\ x-y\equiv 8[22]\end{cases}$.

4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أنّ a أوّلي مع $b\times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD\left(a;b^n\right)=1$.

(يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر.)

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

$(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أنّ $1,531<\alpha<1,532$

4) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

$(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.

5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ ، والتي تنعدم من أجل القيمة 1.

6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$. نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha[$ ، $F(t)=\dfrac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

جـ) احسب $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} 0} F(t)$.

7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$.

$\mathbb{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أنّ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathscr{A}$ حيث: $\mathscr{A}=\dfrac{2}{9}(\alpha^3+6\alpha)\,ua$

(ua وحدة المساحات).

أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathbb{S}(m)=2\mathscr{A}$.

ب) علماً أنّ $3,140<\pi<3,142$ أعط حصرًا للعدد m .

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1. أ - النقط A ، B و C ليست في استقامية لأن $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1) \not\parallel \overrightarrow{AC}(3;-2;1)$	0,25	
ب - النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي لأن $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	0,5	
جـ - من ب - أو $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ينتج D مرجّح $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$	0,25	
د - D منتصف $[AE]$ ومنه $E(-1;3;6)$.	0,25	
هـ - $\overrightarrow{n_{(\mathscr{P})}}=\overrightarrow{AD}$ و $D\in(\mathscr{P})$ أو $MA=ME$ ومنه: $x+y-z+1=0$.	0,25	
2. (Γ) هي سطح الكرة ذات المركز D ونصف القطر AD حيث $AD=ED=\sqrt{3}$.	0,5	
3 أ - $F\in(\mathscr{P})$.	0,25	04 نقاط
ب - $[AE]$ و $[GH]$ متعامدتان، متقايستان ومتناصفتان في D ومنه $AGEH$ مربع.	0,25	
$s(AGEH)=2AD^2=6ua$.	0,25	
4. أ - (AEH) معيّن بالشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ ؛ $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{AC}$.	0,5	
ب - $\overrightarrow{DN}=t.\overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{DN}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي $N\in(\Delta)$.	0,25	
جـ - $v(t)=\frac{1}{3}DN\times s(AGEH)=2\sqrt{14t^2}=2\|t\|\sqrt{14}\ uv$	0,25	
د - $N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ ، $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$.	0,25	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1. أ - تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.	0,5	
ب - $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ إذاً نسبة التشابه المباشر هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$ زاوية له.	0,5	
2. $z_G=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$.	0,25	
3. أ - $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=-\frac{1}{3}i$.	0,5	03 نقاط
ب - $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ هو عدد تخيلي صرف إذاً المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان.	0,5	
جـ - $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=-i$ وهو تخيلي صرف ومنه $(BH)\perp(AC)$ ؛ بما أنّ ارتفاعات مثلث تتلاقى في نقطة واحدة فإنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .	0,75	

تابع للموضوع الأول — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
.4 $\frac{3}{2}=\frac{z_H-z_I}{z_H-z_G}$ وهو حقيقي ومنه $(GH)//(IH)$ إذن النقط G، H و I في استقامية.	0,5	02 نقاط
.5 أ - $z_A+1+i=1+2i$، إذاً $\lvert z_A+1+i\rvert=\sqrt{5}$ أي $A\in(\Gamma)$.	0,5	
ب - $z=z_I+\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ إذن (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.	0,25	
جـ - إنشاء الدائرة (Γ) من المركز I وتمر بالنقطة A.	0,25	
د - $\lvert z_B-z_I\rvert=\sqrt{5}$، $\lvert z_C-z_I\rvert=\sqrt{5}$ إذن $IB=IC=\sqrt{5}$ أي $B\in(\Gamma)$ و $C\in(\Gamma)$.	0,5	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
.1 أ - من أجل كل عدد طبيعي k، $2^{3k}\equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ و $2^{3k+2}\equiv 4[7]$.	0,5	04 نقاط
ب - $1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\equiv 0[7]$	0,5	
.2 أ - 89 عدد أوّلي لأنه لا يقبل القسمة على 2،3،5،7 و $11^2>89$.	0,25	
ب - $D_{7832}=\{1,2,4,8,11;22;44,88;89,178,356,712,979,1958,3916,7832\}$	0,5	
جـ - باستعمال خوارزمية إقليدس أو تحليل 981 نجد $PGCD(981,977)=1$.	0,25	
.3 $x'^2-y'^2=7832$ و $PGCD(x';y')=1$ و $x'-y'\equiv 4[11]$ إذاً $(x';y')=(981;977)$ ومنه $(x;y)=(1962;1954)$.	0,5	
.4 أ - باستعمال مبرهنة بيزو ، البرهان أنّ a أوّلي مع $b\times c$.	0,25	
ب - باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $PGCD(a;b^n)=1$.	0,5	
جـ - $p\gcd(981^{1954};977)=1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};977^{1962})=1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};2^8)=1$ ؛ من 4. أ . ينتج $p\gcd(981^{1954};977^{1962}\times 2^8)=2^{1954}$ $p\gcd(1962^{1954};1954^{1962})=2^{1954}$	0,75	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
.1 أ - $f(1)=1=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ، ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.	0,5	03,25 نقطة
ب - $\lim\limits_{x\to 0}-x\ln x=0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.	0,25	
التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في $A(0;1)$ معادلته $y=1$ و $x\geq 0$.	0,25	
.2 أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.	0,25	
ب - من أجل $x\in]0;+\infty[$، $f'(x)=-x(2\ln x+1)$ + الإشارة	0,75	
f متزايدة تماما على $[0;e^{-\frac{1}{2}}]$ ومتناقصة تماما على $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$	0,25	
جدول تغيرات الدالة f.	0,25	
.3 أ - تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.	0,75	

تابع للموضوع الأول — عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
ب - $f(1,531)\approx 0,002$ ؛ $f(1,532)\approx -0,001$ إذاً $f(1,532)<f(\alpha)<f(1,531)$	0,5	03,75 نقطة
4. أ - الدالة g زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $g(-x)=g(x)$	0,25	
ب - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.	1	
5. $x\mapsto \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1.	0,5	
6. أ - $F(t)=\left(\alpha-\frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha+\frac{1}{9}\alpha^3\right)-\left(t-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{1}{9}t^3\right)$.	0,25	
ب - من $\ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}$ ؛ $\ln(t)=\frac{1-f(t)}{t^2}$ إذاً $F(t)=\frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,25	
جـ - لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=1$ إذاً $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}F(t)=\frac{\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,5	
7. أ - القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$ هي: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3+6\alpha}{\pi}}$.	0,25	
ب - علما أنّ $3,140<\pi<3,142$ و $1,531<\alpha<1,532$ نجد: $1,344<m<1,346$.	0,25	

(الموضوع الثاني) — عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن حساب u_1 في كل حالة أو $\frac{1}{2}u_n+3$ بدلالة n)	1	04 نقاط
2. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل ($\lvert iz-1-i\rvert=3$ معناه $\lvert z-1+i\rvert=3$)	1	
3. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن استعمال خواص الموافقة بترديد 11)	1	
4. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل (في التمثيل الوسيطي يمكن ملاحظة أن الشعاعين مرتبطان خطيا)	1	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1. $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ معناه $z\in\left\{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3});(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right\}$	1,25	03,25 نقطة
2. أ - $\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.	0,75	
ب - $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=-2\arg(z_A)=-\frac{7\pi}{6}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$	0,75	
جـ - $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.	0,5	